

2024年度（令和6年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（物理工学系プログラム 材料機能）

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は、1ページから8ページまであります。解答用紙は、4枚あります。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせてください。
3. 下記表の問題を全て解答してください。1題につき解答用紙1枚を使用して解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

| 問題番号 | 出題科目 |
|------|--------|
| 11 | 基礎物理数学 |
| 12 | 固体物理 |
| 13 | 材料物理化学 |
| 14 | 材料科学 |

4. 監督者の指示に従って、問題番号、志望プログラム及び受験番号を4枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。
5. 計算用紙は、問題冊子の白紙ページを利用してください。
6. 解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入してください。
7. 机の上には、受験票、黒の鉛筆・シャープペンシル、消しゴム、鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。
8. コンパス及び定規等は、使用できません。
9. 時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は、使用しないでください。
10. スマートフォン、携帯電話、ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し、それらの機器のアラームを解除してから、電源を切り、かばん等に入れてください。
11. 試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は、手をあげてください。
12. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 11 基礎物理数学 設問すべてについて解答すること。設問 I と設問 II の解答を解答用紙の表面に、設問 III と設問 IV の解答を解答用紙のうら面にそれぞれ記入すること。

I 行列 $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ について、次の (1) ~ (5) の問いについて答えよ。

- (1) 行列 M の逆行列を求めよ。
- (2) 行列 M の固有値を求めよ。
- (3) 行列 M の固有ベクトルを求めよ。
- (4) (1) ~ (3) の結果を用いることにより、行列 M の対角行列 Λ を求めよ。
- (5) (4) の結果を用いることにより、行列 M を対角行列 Λ により表すことができることを示せ。

II 次の (1) ~ (2) の問いについて答えよ。

- (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ を考える。この級数が収束するか、発散するか証明せよ。
- (2) 指数関数 e^x を考える。この関数をマクローリン展開し、その結果が収束するか、発散するか証明せよ。

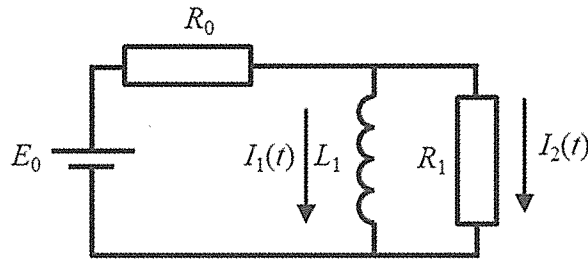
III 次の(1)～(3)の問いについて答えよ。

放射性元素は一定の割合で崩壊して別の元素になる。 $f(t)$ を放射性元素の濃度とする。

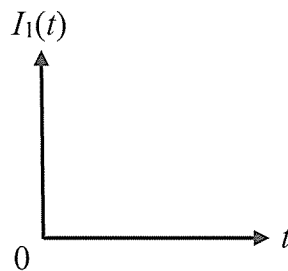
- (1) 時刻 t から $t + \Delta t$ までの崩壊による濃度の変化は、濃度と経過時間の双方に比例するとしたとき、この関係式を記せ。ここで比例定数は k とする。
- (2) (1) で記した関係式は微分の定義を利用することにより、微分方程式に変形することができる。微分方程式の形を示せ。
- (3) (2) で導出した微分方程式を解け。ここで崩壊した別の元素が発生した時刻を $t=0$ とし、 $f(0)=f_0$ とする。

IV 次の(1)～(3)の問いについて答えよ。

下図に示す電気回路について考える。 E_0 の電圧をもつ直流電源、 R_0 および R_1 の抵抗値をもつ抵抗器、 L_1 のリアクタンスをもつコイルがある。以下の問いに答えよ。なお、抵抗器における電圧は電流と抵抗の積、コイルにおける電圧はリアクタンスと電流の時間変化の積で表される。



- (1) L_1 のリアクタンスをもつコイルに流れる電流を $I_1(t)$ 、 R_1 の抵抗値をもつ抵抗器に流れる電流を $I_2(t)$ とする。 $I_1(t)$ および $I_2(t)$ が満たす微分方程式を全て記述せよ。
- (2) (1) で導出した微分方程式を解き、 $I_1(t)$ を求めよ。ただし、 $I_1(0)=0$ とする。
- (3) (2) より、 $I_1(t \rightarrow \infty)$ を求め、 $I_1(t)$ の時間依存性の概略を、縦軸に $I_1(t)$ 、横軸に t のグラフに図示せよ。



問題 12 固体物理 設問すべてについて解答すること。

1 辺が L 、体積 $V (= L^3)$ の金属結晶の立方体がある。結晶内部のポテンシャルを 0 とし、電子 1 個の時間に依存しないシュレーディンガー方程式を周期境界条件のもとで解くと、そのエネルギー固有値は、

$$E = \frac{h^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

である。ここで、 $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ は量子数、 m は電子の質量、 h はプランク定数である。ここに N 個の電子を配置すると、エネルギーが最も低い量子状態から順に電子は配置され、最後に最も高いエネルギー E_F の状態が占められる。1 つの量子状態には、スピン量子数を考慮すると 2 個ずつ電子が配置されることに注意せよ。温度 $T = 0 \text{ K}$ として、次の (1) ~ (8) の問いに答えよ。なお、式を求める場合、その導出過程を示すこと。必要に応じ、 $\hbar (= \frac{h}{2\pi})$ を用いてよい。

- (1) E_F は何とよばれているか。一般的な名称を答えよ。
- (2) E_F を電子数密度 $n (= N/V)$ の関数として求めよ。
- (3) エネルギーが E_F の電子の波数 k_F を、 E_F を用いて表せ。
- (4) 3次元空間の単純立方格子（格子定数 a ）について、境界面を含む第 1 ブリュアン領域内で電子が取り得るエネルギーの最大値を求めよ。
- (5) 単位体積の金属結晶について、電子の状態密度 $g(E)$ をエネルギー E の関数として求め、 $g(E)$ のグラフを描け。
- (6) 電子は $E = 0$ から E_F までの量子状態を占有している。単位体積の金属結晶について、1 電子当たりの平均エネルギーを、 E_F を用いて表せ。

(7) 下の図1～3は、ある物質の電子の状態密度を模式的に描いたグラフである。それぞれどの物質に対応するのか、次の { } 内から物質を選択し、それを選んだ理由とともに解答せよ。
 {銅、ナトリウム、ゲルマニウム}

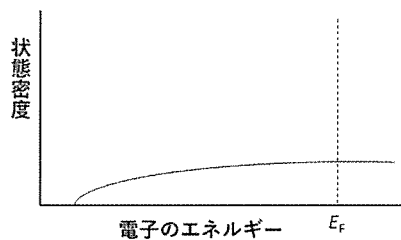


図 1

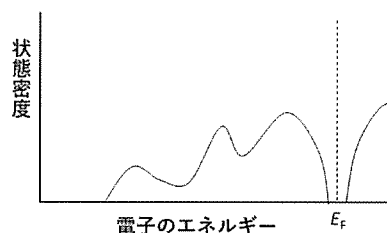


図 2

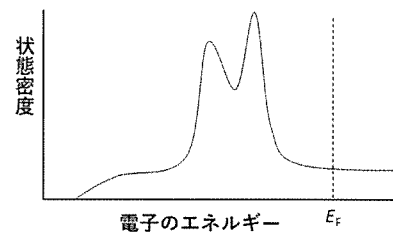


図 3

(8) 前問のように、電子の状態密度を知ることができれば、物質の電子に由来する物理的性質をある程度予測することができる。電子の状態密度が測定できる分析装置を下の【 】内から1つ選択せよ。

【X線回折装置、X線光電子分光分析装置、エネルギー分散型蛍光X線分析装置、波長分散型蛍光X線分析装置、2次イオン質量分析装置、電子スピン共鳴装置】

問題 13 材料物理化学 設問すべてについて解答すること。

I 液体中にある球形気泡まわりの液側物質移動現象について次元解析を行う。現象に関与する物理量を k_L : 液側物質移動係数 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)、 μ : 液の粘性係数 ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)、 u_B : 気泡の浮上速度 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)、 ρ : 液の密度 ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)、 d_B : 気泡の直径 (m)、 D_{AB} : 液中ガスの拡散係数 ($\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$) とする。次の (1) ~ (3) の問いについて答えよ。

(1) π 定理により無次元数の個数を推定せよ。

(2) 気泡の浮上速度 u_B に関する無次元数をレイノルズ数 ($Re = d_B u_B \rho / \mu$) とすると、他の無次元数を次元解析により求め、その無次元数の名前を答えよ。

(3) (2) で求めた無次元数を含めた無次元相関式は気泡の浮上速度 u_B が非常に遅い場合、つまり気泡が静止した状態に近い場合には適用できない。その理由を答えよ。また、静止した状態にも適用できる無次元相関式の名前を答えよ。

II 金属精錬においてスラグを用いて金属中の不純物を除去する方法がある。金属中に含まれる不純物がスラグ中へ移行するとき、金属相とスラグ相との界面に二重境膜を仮定して、各相の境膜内の物質移動流束 (N_M 、 N_S) と界面化学反応流束 (N_C) は次式で与えられる。

$$N_M = k_M (C_M - C_M^i)$$

$$N_S = k_S (C_S^i - C_S)$$

$$N_C = k_C \left(C_M^i - \frac{C_S^i}{m} \right)$$

ここで、 k_M 、 k_S は金属相内およびスラグ相内物質移動係数、 k_C は化学反応速度定数、 m は平衡定数である。また、 C は不純物濃度で、下付の M と S はそれぞれ金属相とスラグ相、上付の i は界面を表す。次の (1) ~ (2) の問いについて答えよ。

(1) 定常状態を仮定し、総括反応流束を N_{ov} とすると、 $N_M = N_C = N_S = N_{ov}$ が成立する。 N_{ov} を界面濃度 (C_M^i 、 C_S^i) を消去した式で記述せよ。

(2) 化学反応律速の場合、 k_M 、 k_S 、 k_C 、 m の間に成り立つ関係を示せ。

Ⅲ 球形固体粒子が表面から反応し、反応層が粒子表面から内部へ向かって成長する場合を考える。
次の(1)～(3)の問いについて答えよ。

(1) このような反応形態となる固体反応モデルの名前を答えよ。

(2) 反応速度式は律速段階により以下の2式のようにになる。

$$1 - (1 - \alpha)^{1/3} = \frac{kt}{\rho r_0}$$
$$\{1 - (1 - \alpha)^{1/3}\}^2 = \frac{k't}{r_0^2}$$

ここで、 α は反応率、 k 、 k' は速度定数、 ρ は密度、 r_0 は粒子の初期半径である。
界面反応律速の速度式はどちらの式か示し、その名前を答えよ。

(3) 2つの速度式において、 $\alpha = 0.875$ の時の反応時間 t が等しい場合の k と k' の比を求めよ。
ただし、 $\rho = 4$ 、 $r_0 = 1$ とする。

問題 14 材料科学 設問すべてについて解答すること。

I 次の(1)～(3)の問いについて答えよ。

(1) 次の文章を読み、[ア]～[セ]に当てはまる語句あるいは数字を書け。ただし[キ]の解答として「部分」は不可とする。

結晶材料の変形は多くの場合転位の移動によって生じる。転位の性質を表すため、図1の原子配置を考える。図1(a)は格子欠陥を含まない理想結晶の断面、図1(b)は[ア]転位を含む結晶の転位線に垂直な断面である。図1のように原子間を結ぶ回路を考えた場合、上向きと下向き、左向きと右向きへとそれぞれ同じ原子数だけ原子が動いたとき、理想結晶では始点と終点が同一原子になる。一方、転位を含む結晶では始点と終点が同一でない。この図1(b)中のベクトルABは[イ]と呼ばれ、転位の性質を示す最も重要な量である。転位線と[イ]が平行な転位を[ウ]転位、垂直な転位を[ア]転位という。[ア]転位と[ウ]転位の移動の仕方の大きな違いとして、[ウ]転位は障害物にぶつかったとき容易にすべり面を変えることができ、これを[エ]すべりと呼ぶ。一方[ア]転位がすべり面を変えるには[オ]運動と呼ばれる点欠陥の移動を伴う非保存運動を行う必要がある。

[イ]が結晶格子の並進ベクトルと一致する転位を[カ]転位、そうでない転位を[キ]転位という。[キ]転位の代表例として、面心立方構造を有する結晶中で[カ]転位は二本のショックレーの部分転位に分解し、両者の間には[ク]欠陥と呼ばれる面欠陥が生じる。転位がもつ弾性ひずみエネルギーは[イ]の大きさの[ケ]乗に比例する。

転位を動きにくくすることにより材料を強化することができる。金属および合金における代表的な強化(硬化)機構には、結晶粒微細化硬化、加工硬化、析出硬化などがある。多結晶純金属の降伏強度は結晶粒の平均粒径の[コ]乗に依存して大きくなり、これはホール・ペッチの関係と呼ばれる。

材料を再結晶化温度以下で加工すると転位密度が[サ]くなる。加工硬化を説明するベイリー・ハースシュの関係によると、材料強度は転位密度の[シ]乗に依存して大きくなる。

結晶中に析出物がある場合、転位がそれを迂回する場合とせん断する場合がある。前者の場合、析出物の周りには[ス]が残される。またこの際、材料の強度は析出物の平均間隔に依存して変化し、析出物の間隔が広がると強度は[セ]する。

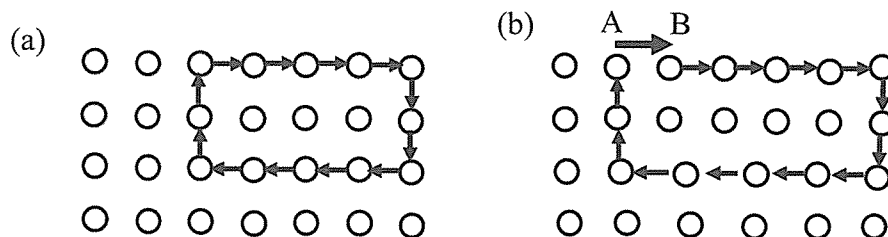


図 1

(2) 下線部について、面心立方構造を持つ金属材料において、(111)面上で $a/2[10\bar{1}]$ 転位 (a は格子定数) が 2 本の部分転位に分解する際の転位分解式を具体的に示せ。

(3) 転位の増殖源として考えられるフランク・リード源を図示し、転位の増殖機構を説明せよ。

II 図2は大気圧下における、ある仮想 A、B 元素の二元系状態図（横軸の組成は mass% 表記。左軸が 0%、右軸が 100%）である。状態図中には液相(L)、固相 α 相、固相 β 相が存在する。図中の $a \sim n$ はそれぞれ図示した点の B 元素濃度 (mass%B) を示し、破線は補助線である。例えば点 n では、 $n = 100$ である。図中に示す組成を有する合金 Z を 1 kg 準備し、液相状態から徐冷し、 $T_1 \sim T_3$ の種々の温度にて保持する実験を行った。次の (1) ~ (4) の問いについて答えよ。ただし、A 元素の原子量を N_A 、B 元素の原子量を N_B 、アボガドロ定数を V とする。

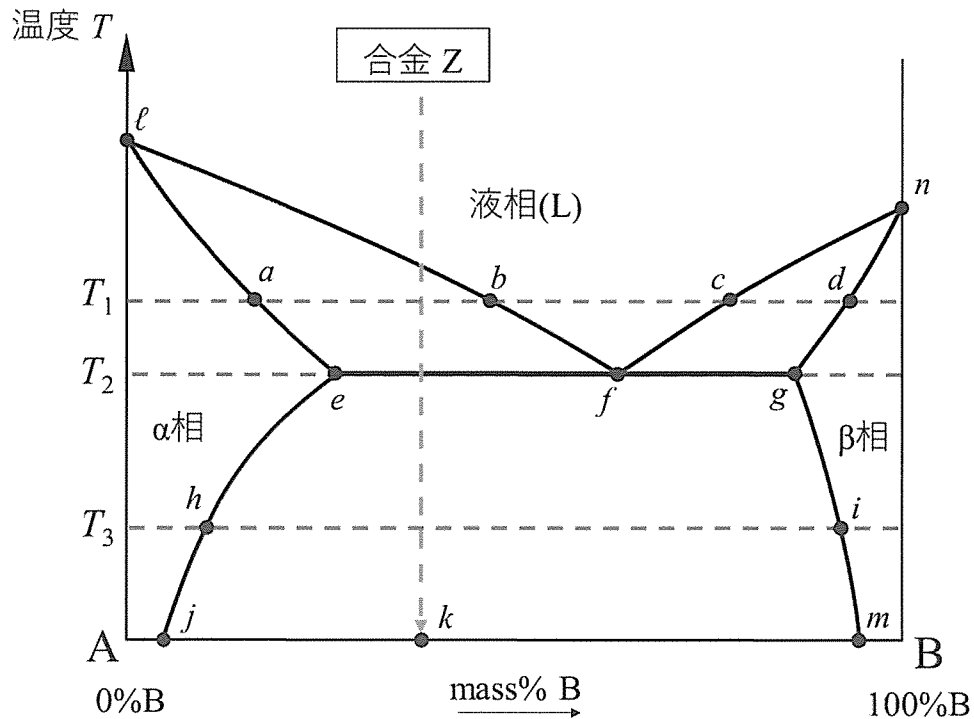


図2 A-B 二元系状態図

- (1) 温度 T_1 において平衡状態で合金 Z 中に存在する相の名称、その相に含まれる B 元素濃度、各相の質量を、それぞれ図中の記号を用いて示せ。
- (2) 温度 T_1 にて合金 Z 中に存在する α 相の中に固溶する B 元素の原子数を求めよ。
- (3) 温度 T_2 にて生じる二元系不変系反応の名称を、日本語、英語併記で答えよ。
- (4) (3) により不変系反応が完全に進行した合金 Z をさらに温度 T_3 で保持した際に、温度 T_2 での不変系反応により生じた β 相から析出する α 相 (二次 α 相) の質量を、(1) と同様に図中の記号を用いて示せ。