2024年度(令和6年度)

後　期　日　程

数　　　学　(120分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は，1ページから4ページまであります。解答用紙は，$\boxed{後1}$，$\boxed{後2}$，$\boxed{後3}$，$\boxed{後4}$ の4枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて，各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
   なお，解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って，すべての解答用紙の該当欄に志望学科名(社会工学科を志望するものは志望分野名，創造工学教育課程を志望するものは志望コース名)及び受験番号(2か所)を記入しなさい。
5. 解答用紙の網掛け部分及び※を付した欄には，何も記入してはいけません。
6. 問題冊子の白紙と余白は下書きに適宜利用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ k を定数とする。3次関数 $f(x)=x^3-3x^2+kx+k$ について，曲線 $y=f(x)$ を C とし，C の変曲点を P とする。P を通る傾き m の直線を ℓ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をとる k の範囲を求めよ。

(2) 点 P の座標を求めよ。

(3) 直線 ℓ と曲線 C の共有点の個数を調べよ。

(4) (1) で求めた k の範囲において，関数 $f(x)$ の極値の和が 0 となる k の値を定めよ。

(5) (4) で定めた k のもとで，関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値 $f(\alpha)$，$x=\beta$ で極小値 $f(\beta)$ をとるとする。直線 ℓ が 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ を通るとき，m の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 白玉 n 個と赤玉 r 個が袋に入っている。ただし $n \geqq 0$, $r \geqq 1$ とする。この袋から無作為に r 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が r 個出る確率を $P(n,r)$ とする。

(1) $P(n,r)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(n,2)$ を求めよ。

(3) 等式 $P(n,3) = aP(n,2) + bP(n+1,2)$ がすべての n で成り立つように，定数 a, b の値を定めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(n,3)$ を求めよ。

(5) $r \geqq 4$ のとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(n,r)$ を r を用いて表せ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \qquad \left(-\frac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5\pi}{4}\right)$$

によって定義する。

(1) $f(x)$ の増減を調べて最大値と最小値を求めよ。

(2) $-\dfrac{3\pi}{4} < t < \dfrac{5\pi}{4}$ とする。点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線 ℓ が直線 $y = -2x$ と平行であるような t を求め，そのときの接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{6}\right)$ と x 軸および直線 $x = \dfrac{5\pi}{6}$ で囲まれる図形が，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

4 $\alpha = 8 + 4i$ とする。複素数平面において原点を O とし，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ を C 上の点とし，OP を一辺とする正方形 OPQR を考える。ただし頂点 O, P, Q, R は反時計回りにとる。

(1) $|\alpha|$ を求めよ。

(2) 点 Q を表す複素数を z を用いて表せ。

(3) 直線 OP が円 C と交わるとき，P ではない交点を $\mathrm{S}(w)$ とする。また，直線 OP が円 C と接する場合は $\mathrm{S}(w) = \mathrm{P}(z)$ とする。$|w|$ を $|z|$ を用いて表せ。

(4) 正方形の対角線 PR を $2:1$ に内分する点を T とする。P を円 C 上で動かしたとき，(3) で定めた S について ST^2 の最小値を求めよ。