２０２４年度　前橋工科大学　入学試験

一般選抜〔前期日程〕・帰国生徒・私費外国人留学生

建築・都市・環境工学群、情報・生命工学群

入学試験問題　〔数学〕

〈注意事項〉

１．<u>試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。</u>

２．試験時間は、１２０分です。

３．試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、挙手して監督者に知らせてください。

４．受験票は、座席番号の横に置いてください。また、机の上には、受験票記載の「試験中に使用を認めるもの」以外の所持品を置いてはいけません。

５．この冊子には、表紙１枚、白紙２枚、問題用紙２枚、白紙１枚の順で、合計６枚がとじてあります。白紙は、計算用紙として使用しても差し支えありません。ホチキスは、外しても差し支えありません。

６．この冊子とは別に、解答用紙４枚がとじてあります。解答用紙のホチキスは、外してはいけません。

７．試験開始の合図後、用紙の枚数を確認してください。

８．志望学群に○をつけてください。

９．すべての解答用紙の所定欄に、受験番号と氏名を忘れずに記入してください。受験番号・氏名が記載されていない解答用紙は、採点しません。

10. 解答は、問題番号（ $\boxed{1}$～$\boxed{4}$ ）と対応した解答用紙に書き、解答用紙の表に書ききれないときは裏に書いてください。問題番号と異なる解答用紙に書いた場合は、採点されません。

11. 特に指示がない場合、解答は最後の結果だけでなく途中経過も書いてください。

12. 質問がある場合は、黙って挙手してください。

13. 試験中、物の貸し借りをしてはいけません。

14. 途中退室はできません。

15. 解答終了の合図があったら、直ちに筆記用具を置き、座ったまま指示を待ってください。

16. 監督者の指示に従わない場合には、不正行為とみなし、厳正に対処します。

17. 受験票は、各自持ち帰り大切に保管してください。

18. 試験終了後、問題冊子・計算用紙は持ち帰ってください。

1 n を自然数とする。xy 平面上に, 直線 $\ell_n : y = n$, 曲線 $C_1 : y = \log_2 x$, 曲線 $C_2 : y = \log_4 x$ がある。次の問いに答えなさい。なお, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。

(1) ℓ_n が C_1, C_2 と交わる点をそれぞれ P_n, Q_n とする。線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点の個数 S_n を n を用いて表しなさい。なお, 線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ には両端の点 P_n, Q_n が含まれるものとする。

(2) C_1, C_2 および ℓ_n で囲まれた部分（境界線を含む）を D_n とする。D_n に含まれる格子点の個数 T_n を n を用いて表しなさい。

(3) S_n, T_n をそれぞれ (1), (2) で定めたものとする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - n}{S_n}$ を求めなさい。また, その極限値を α とするとき, 不等式

$$\frac{T_m - m}{S_m} < \alpha - \frac{1}{7}$$

を満たす最大の自然数 m の値を求めなさい。

2 底面が正方形 ABCD であり, $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = 1$ である四角錐（すい） O-ABCD を考える。$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき, 次の問いに答えなさい。

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい。

(2) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{d}$ を θ を用いて表しなさい。

(3) 点 H を線分 BD の中点とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は底面 ABCD に垂直であることを示しなさい。

(4) 四角錐 O-ABCD の体積 $V(\theta)$ を θ を用いて表しなさい。

(5) θ が動くとき, (4) の $V(\theta)$ の最大値を求めなさい。また, そのときの $\cos\theta$ の値を求めなさい。

3 次の問いに答えなさい。ただし, e は自然対数の底を表す。

(1) $x > 0$ のとき, 不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) (1) の結果を利用して, $x > 0$ のとき, 不等式

$$\frac{e}{x}\left(e^{-\frac{x}{2}} - 1\right) < \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} < \frac{e}{x}\left(e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}} - 1\right)$$

が成り立つことを示しなさい。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ を求めなさい。ただし, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$ は用いてよい。

4 関数

$$f(x) = \frac{1}{2}(1-\cos x)^2 \quad (0 \leqq x \leqq \pi), \qquad g(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

について, 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減, 凹凸を調べ, 曲線 $y = f(x)$ の概形をかきなさい。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$ を求めなさい。

(3) 定義域が $-2 \leqq x \leqq 2$ である 2 つの関数 $y = F(x)$, $y = G(x)$ は, 次の条件 ①, ② を満たすとする。

① $0 \leqq x \leqq 2$ のとき,

$$F(x) = f^{-1}(x), \qquad G(x) = \pi + g(x-1)$$

である。ただし, $y = f^{-1}(x)$ は $y = f(x)$ の逆関数とする。

② グラフはともに y 軸に関して対称である。

このとき, 2 つの曲線 $y = F(x)$, $y = G(x)$ で囲まれた図形を図示し, その面積 S を求めなさい。