

2022年度 前橋工科大学 入学試験

一般選抜〔前期日程〕・帰国生徒・私費外国人留学生

建築・都市・環境工学群、情報・生命工学群

入学試験問題 〔数学〕

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験時間は、120分です。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、挙手して監督者に知らせてください。
4. 受験票は、座席番号の横に置いてください。また、机の上には、受験票記載の「試験中に使用を認めるもの」以外の所持品を置いてはいけません。
5. この冊子には、表紙1枚、計算用紙（白紙）2枚、問題用紙2枚、合計5枚がとじてあります。この冊子とは別に、解答用紙5枚がとじてあります。
6. 試験開始の合図後、用紙の枚数を確認してください。
7. 問題4と問題5を含むすべての解答用紙の所定欄に、受験番号と氏名を忘れずに記入してください。また、解答は、解答用紙の所定欄に書いてください。
8. 志望学群を○で囲んでください。
9. 解答は、問題番号（1～5）と対応した解答用紙に書き、解答用紙の表に書ききれないときは裏に書いてください。問題番号と異なる解答用紙に書いた場合は、採点されません。
10. 問題4（数学Ⅲを含む。）と問題5（数学Ⅲを含まない。）は選択問題です。どちらか1問を選択して解答してください。解答用紙の選択欄については、選択する方に○を、選択しない方に×を記入してください。選択欄に○が記された答案のみ、採点します。両方とも選択した場合、選択欄が無記入の場合など、指示に従わない場合は両方の答案が0点となることがありますので、注意してください。
11. 特に指示がない場合、解答は最後の結果だけでなく途中経過も書いてください。
12. 質問がある場合は、黙って挙手してください。
13. 試験中、物の貸し借りをしてはいけません。
14. 途中退室はできません。
15. 解答終了の合図があったら、直ちに筆記用具を置き、座ったまま指示を待ってください。
16. 監督者の指示に従わない場合には、不正行為とみなし、厳正に対処します。
17. 受験票は、各自持ち帰り大切に保管してください。
18. 試験終了後、問題冊子・計算用紙は持ち帰ってください。

1～3 はすべて解答してください。

1 n は 2 以上の自然数とする。次の問いに答えなさい。

(1) $r = 1, 2, \dots, n-1$ のとき、次の等式が成り立つことを示しなさい。

$${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_r + {}_{n-1}C_r + \dots + {}_{r+1}C_r + {}_rC_r$$

ただし、 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ が成り立つことは断りなしに用いてよい。

(2) $f(x) = (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{10}$ の x^3 の係数を求めなさい。

(3) $g_n(x) = \sum_{k=1}^n (2k+1)(1+x)^k$ の x^r ($r = 1, 2, \dots, n-1$) の係数は $(2n+1) {}_{n+1}C_{r+1} - 2 {}_{n+1}C_{r+2}$ であることを、 n についての数学的帰納法で示しなさい。

2 座標空間内において、中心が点 $C(3, 0, 0)$ 、半径が 3 の球面 S を考える。 S 上に 3 点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(3, 3, 0)$ 、 $B(1, b, 1)$ ($b > 0$) をとるとき、次の問いに答えなさい。

(1) b の値を求めなさい。

(2) $\angle AOB$ の大きさを求めなさい。

(3) 3 点 O, A, B を含む平面と球面 S が交わってできる円の中心 D の座標を求めなさい。

(4) (3) の点 D に対して、 $\triangle ABD$ の面積を求めなさい。

3 座標平面上に放物線 $C: y = \frac{x^2}{2}$ がある。 $b < a$ とし、 C 上に 2 点 $A\left(a, \frac{a^2}{2}\right)$ 、 $B\left(b, \frac{b^2}{2}\right)$ をとる。また、2 点 A, B における C の接線をそれぞれ l_A, l_B とし、2 直線 l_A と l_B の交点を R とする。次の問いに答えなさい。

(1) 交点 R の座標を a と b を用いて表しなさい。

(2) $\triangle ABR$ の面積 S を a と b を用いて表しなさい。

(3) 放物線 C と 2 直線 l_A, l_B で囲まれた図形の面積 T を a と b を用いて表しなさい。

(4) l_A と l_B が直交するとき、(3) の T の最小値を求めなさい。また、そのときの a, b の値を求めなさい。

4, 5 は選択問題です。どちらか 1 問を選択して解答してください。

解答用紙の選択欄については、選択する方に○を、選択しない方に×を記入してください。

4 関数

$$f(x) = -\cos^4 x + \frac{3}{2}\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{2}$$

について次の問いに答えなさい。

- (1) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で、 $f'(x) = 0$ を満たす x の値をすべて求めなさい。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の増減を $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で調べて、曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形を $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲でかきなさい。ただし、凹凸は調べなくてよい。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。

5 θ は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を満たす実数とし、 xy 平面上の 2 点

$$(1, 2\cos 2\theta + 16\cos \theta + 14), \quad (-1, 2\cos 2\theta + 8\cos \theta + 6)$$

を通る直線を l_θ とする。次の問いに答えなさい。

- (1) $t = 2\cos \theta$ とおくとき、 l_θ の傾き、 y 切片をそれぞれ t を用いて表しなさい。
- (2) θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を動くとき、直線 l_θ が通過する領域を xy 平面上に図示しなさい。